FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

Aula 15

Rotação II

Sumário

- O cálculo da inércia rotacional
- O momento de uma força
- A segunda lei de Newton para a rotação
- Trabalho e energia cinética de rotação

Momento de Inércia

Podemos calcular o momento de inércia de um corpo, em relação a um eixo, supondo que está dividido em muitos elementos de pequeno volume, cada um com massa Δm_i

A expressão de *I* pode ser escrita em termos de Δm

$$I = \lim_{\Delta m_i \to 0} \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int r^2 dm$$

Utilizando $\rho = \frac{dm}{dV}$, obtemos

$$I = \int r^2 \frac{dm}{dV} dV = \int \rho r^2 dV$$

Se *r* é constante, o integral pode ser calculado a partir da geometria do corpo; se não, temos de conhecer como varia com a posição

Tipos de Densidades

Massa Volúmica $\rightarrow$ Massa por unidade de volume:

$$\rho = m / V$$

Densidade de Massa Superficial $\rightarrow$ massa por unidade de superfície de uma chapa de espessura *h* pequena e uniforme:

$$\sigma = m / A = \rho h$$

Densidade de Massa Linear $\rightarrow$ massa por unidade de comprimento de um varão de secção recta uniforme:

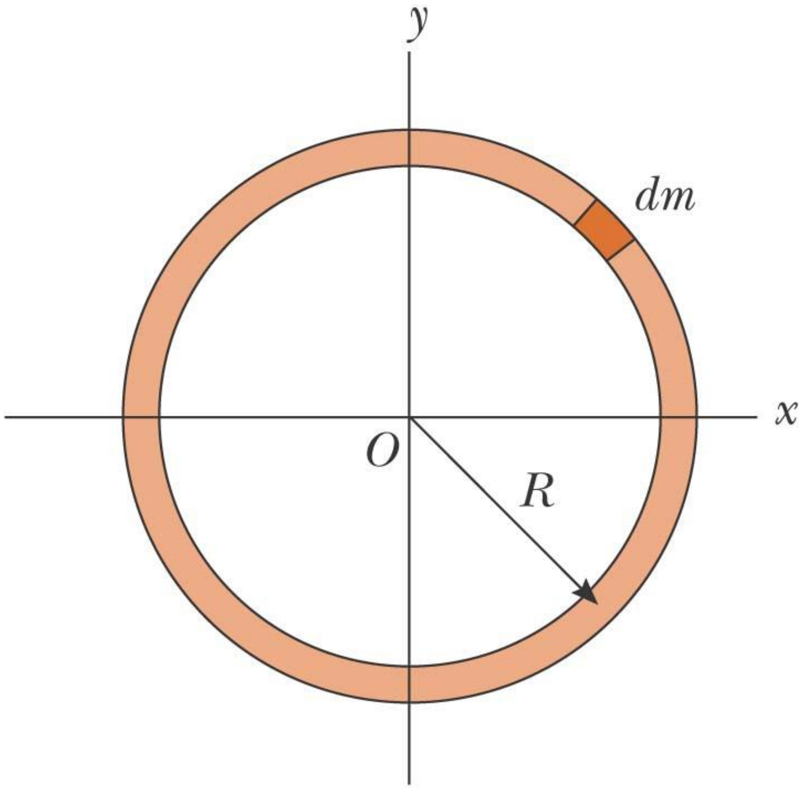
$$\lambda = m / L = \rho A$$

Momento de Inércia de um Aro Fino uniforme, em Relação a um Eixo Passando pelo Centro e Perpendicular ao Plano do Aro

Como o aro é fino, todos os elementos de massa, *dm*, estão à mesma distância do centro:

$$I = \int r^2 dm = R^2 \int dm$$

$$I = MR^2$$



Momento de Inércia de um Varão Rígido Uniforme em relação a um eixo que passa pelo centro

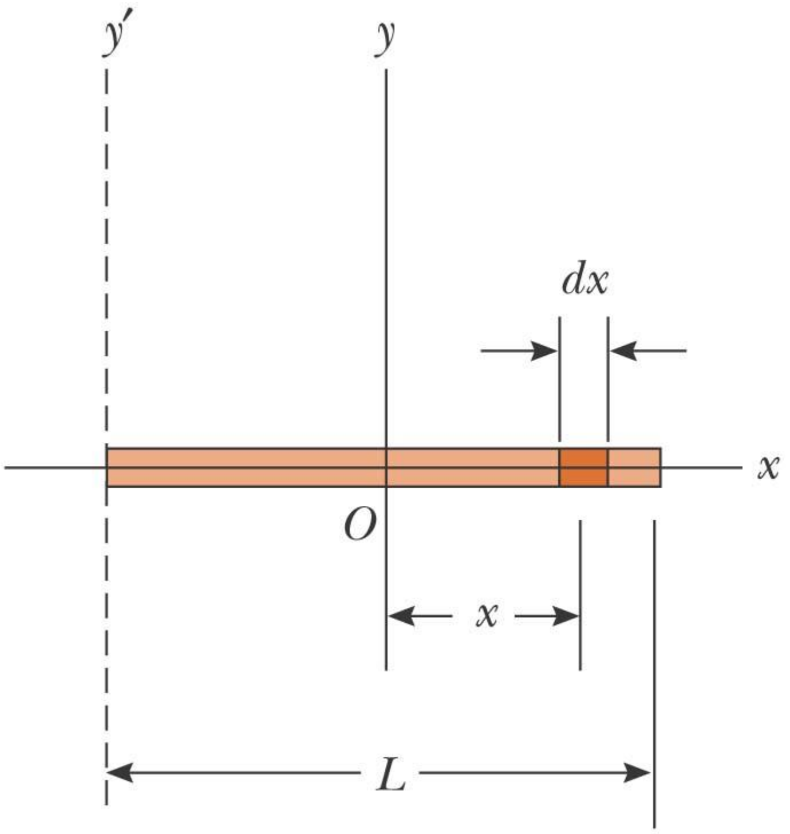
O elemento de área escurecida possui massa:

$$dm = \lambda\, dx$$

O momento de inércia, em relação ao eixo *Oy*, é:

$$I = \int r^2 dm = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \frac{M}{L}\, dx$$

$$I = \frac{1}{12} ML^2$$



Teorema dos Eixos Paralelos

Nos exemplos anteriores, o eixo de rotação coincidia com o eixo de simetria do corpo;

Para um eixo arbitrário, muitas vezes o teorema dos eixos paralelos facilita os cálculos;

O teorema afirma $I = I_{CM} + MD^2$

I é em relação a qualquer eixo paralelo ao eixo que passa no centro de massa do corpo;

I_{CM} é em relação ao eixo que passa no centro de massa;

D é a distância do eixo que passa pelo centro de massa ao eixo arbitrário.

Teorema dos Eixos Paralelos

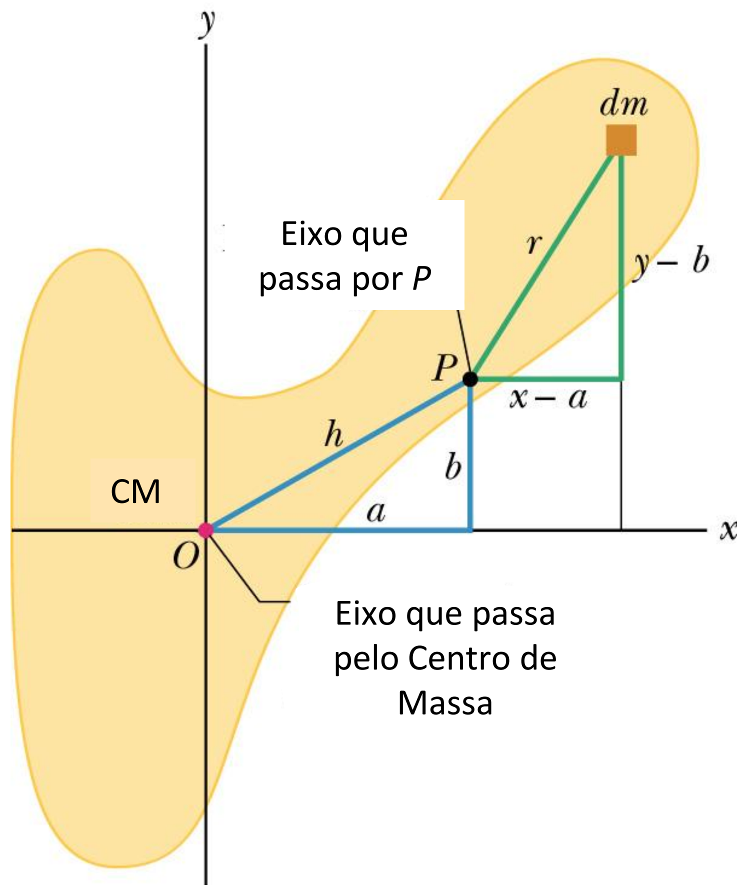
Ambos os eixos são perpendiculares ao plano da figura;

O momento de inércia do corpo em relação ao eixo que passa por *P* é:

$$I_P = \int r^2 dm = \int \left[(x-a)^2 + (y-b)^2 \right] dm$$

$$= \int (x^2 + y^2)\, dm - 2a \int x dm - 2b \int y dm + \int (a^2 + b^2)\, dm$$

$$= I_{\text{CM}} + h^2 M$$



Momento de Inércia de um Varão que Roda em Torno de uma Extremidade

O momento de inércia do varão em relação ao centro é:

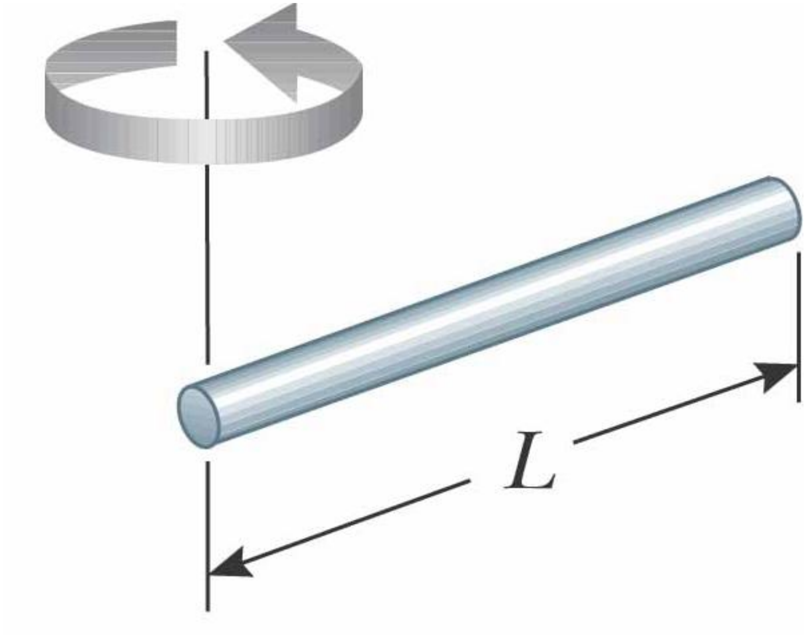
$$I_{CM} = \frac{1}{12} M L^2$$

D é ½ *L*

Portanto,

$$I = I_{\mathrm{CM}} + M D^2$$

$$I = \frac{1}{12} M L^2 + M \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M L^2$$



Momento de uma Força

O momento de uma força, $\vec{\tau}$, provoca a rotação de um corpo em torno de um eixo

O momento de uma força é um vector

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r\,F \sin\phi = F\,d$$

$\vec{F}$ é a força

ϕ é o ângulo entre $\vec{F}$ e $\vec{r}$

d é o braço do momento

Momento de uma Força

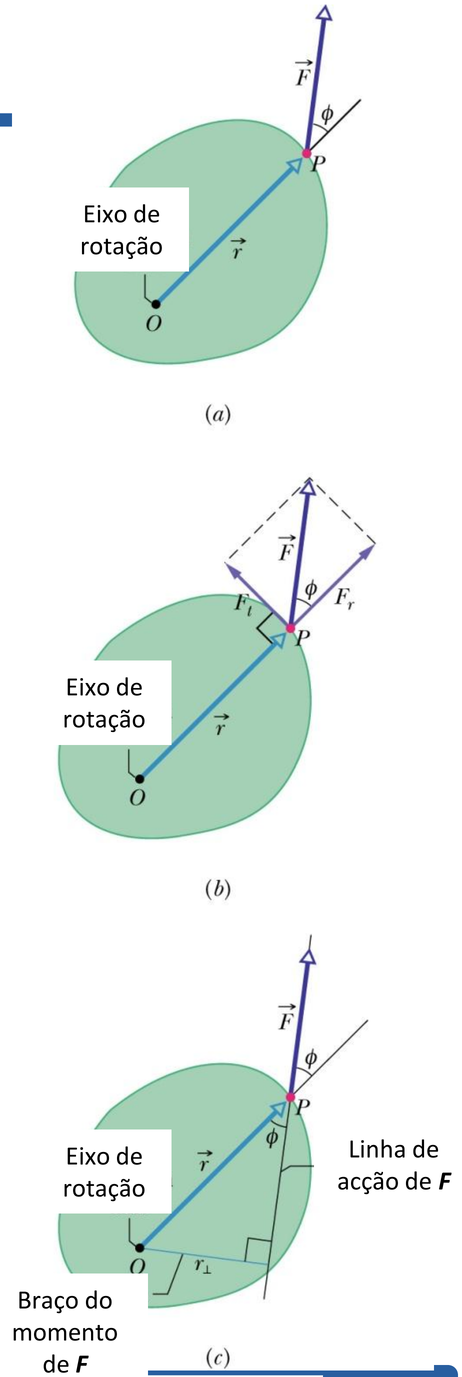
O momento da força $\vec{F}$ em relação ao ponto O é:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r \; F \sin\phi \; = rF_t$$

$$\tau = \; r \sin\phi \; F = r_t F$$

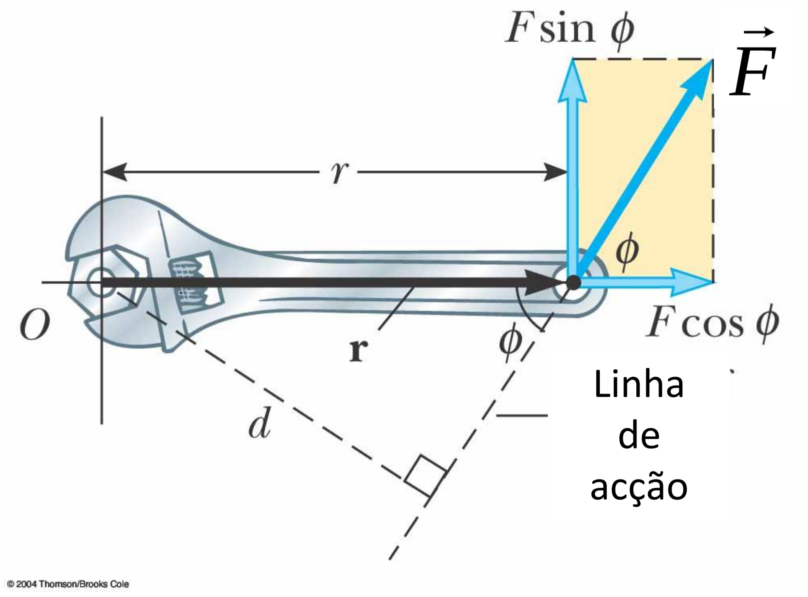
r_t é o braço do momento.



Momento de uma Força

O braço do momento, *d*, é a distância na *perpendicular* entre o eixo de rotação e a linha de acção da força:

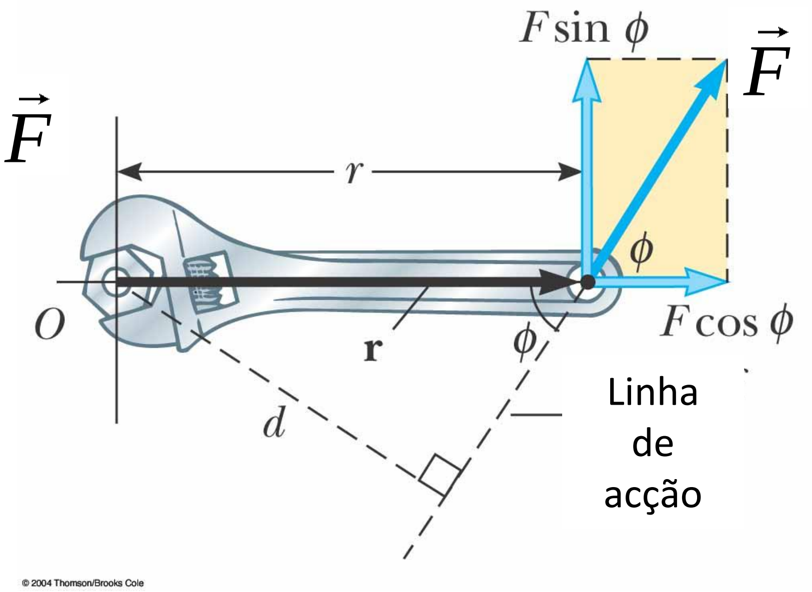
$$d = r \sin \phi$$



Momento de uma Força

A componente horizontal de $\vec{F}$ ($F \cos \phi$) não provoca rotação;

A direcção do momento da força é a do eixo de rotação;



Sentido do momento da força:

Se tende a mover o corpo no sentido directo (oposto aos ponteiros do relógio), é positivo;

Se tende a mover o corpo no sentido retrógrado (dos ponteiros do relógio), é negativo.

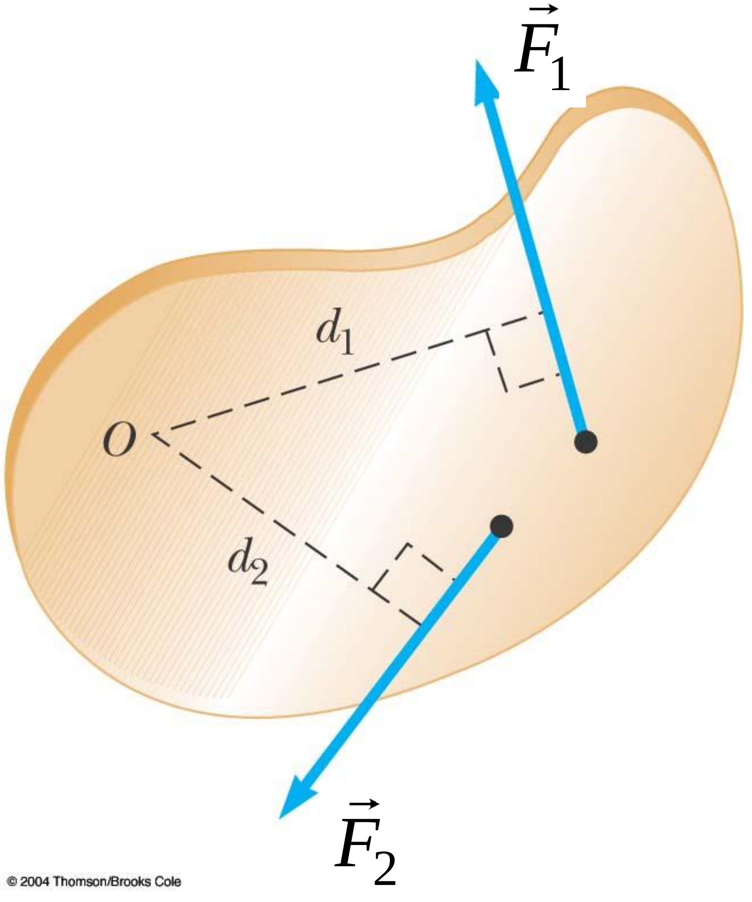
Momento de Força Resultante

A força $\vec{F}_1$ tende a provocar uma rotação no sentido directo, em torno de *O*;

A força $\vec{F}_2$ tende a provocar uma rotação no sentido retrógrado, em torno de *O*;

$$\vec{\tau}_{\text{res}} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2$$

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = F_1 d_1 - F_2 d_2$$



Comparação entre Força e Momento de Força

Forças provocam uma variação do momento linear

- Descrita pela Segunda Lei de Newton

Forças podem provocar uma variação do movimento rotacional

- A variação do movimento rotacional depende do momento da força:
  - depende da força e do braço do momento

Unidade de Momento de Força

A unidade SI do momento de uma força é N·m

As dimensões são as mesmas da energia ou trabalho, mas a grandeza é fundamentalmente diferente destas;

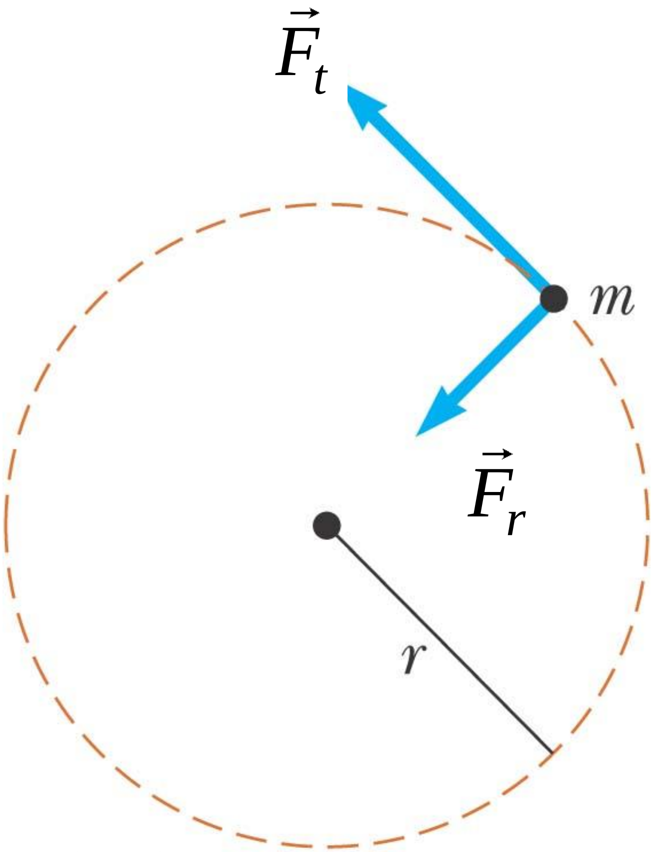
As unidades de momento de força ***não podem*** ser mudadas para joule;

Momento de uma Força e Aceleração Angular, Partícula

Consideremos uma partícula de massa *m* que roda numa circunferência de raio *r* sob a influência de uma força tangencial $\vec{F}_t$

A força tangencial provoca uma aceleração tangencial:

$$F_t = ma_t$$



Momento de uma Força e Aceleração Angular, Partícula

O módulo do momento da força $\vec{F}_t$ em relação ao centro da trajectória é:

$$\tau = F_t\, r = (m a_t)\, r$$

A aceleração tangencial está relacionada com a aceleração angular:

$$\tau = (m a_t)\, r = (m r \alpha)\, r = (m r^2)\, \alpha$$

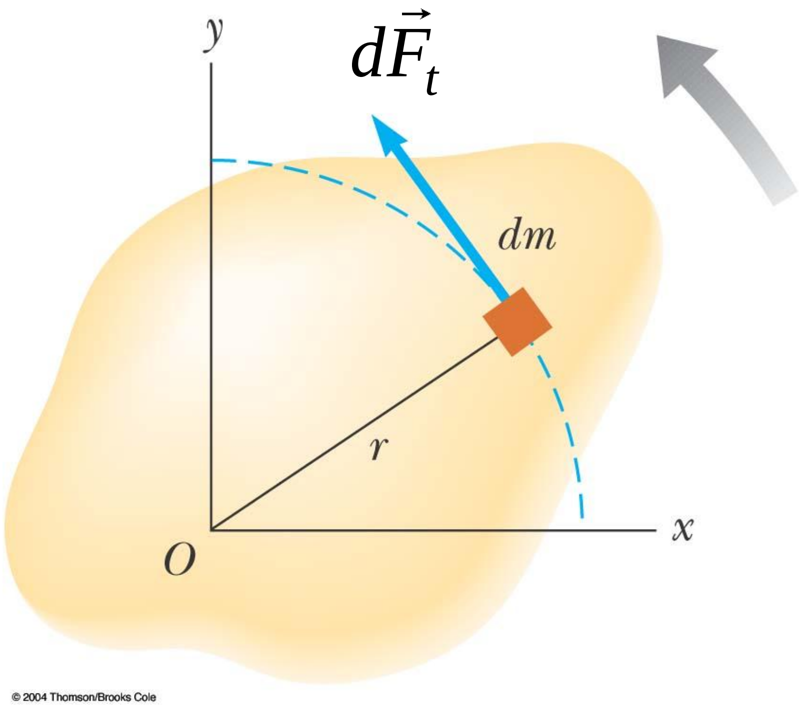
Como mr^2 é o momento de inércia da partícula,

$$\tau = I\alpha$$

O módulo do momento da força é directamente proporcional à aceleração angular, sendo o momento de inércia a constante de proporcionalidade.

Momento de uma Força e Aceleração Angular

Considere-se agora que o objecto é um corpo rígido, constituído por um número infinito de elementos *dm* de dimensão infinitesimal;



Cada elemento de massa descreve uma trajectória circular centrada na origem, *O*;

Cada elemento de massa possui aceleração tangencial.

Momento de uma Força e Aceleração Angular

Partindo da Segunda Lei de Newton

$$dF_t = (dm)\, a_t$$

O momento de força infinitesimal associado à força F_t é

$$d\tau = r\, dF_t = a_t r\, dm = \alpha r^2\, dm$$

O momento de força resultante é

$$\sum \tau = \int d\tau = \int \alpha r^2 dm = \alpha \int r^2 dm$$

ou, no caso tridimensional, $\sum \vec{\tau} = I\vec{\alpha}$

Momento de uma Força e Aceleração Angular

A relação obtida é a mesma para uma partícula ou para um corpo rígido;

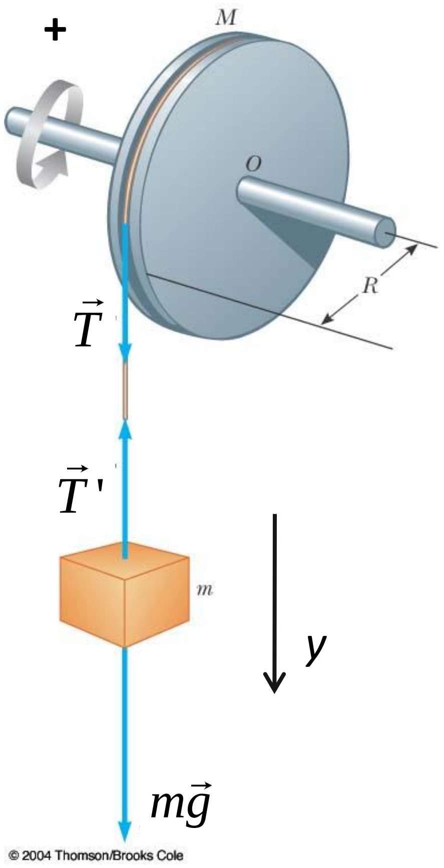
O resultado é válido mesmo que as forças possuam componente radial;

Como a linha de acção da componente radial passa pelo eixo de rotação, o momento de força resultante é nulo.

Momento de uma Força e Aceleração Angular
Exemplo – a Roldana

A roldana está a rodar, aplicamos:

$$\sum \tau = I\alpha$$



A tensão é a força tangencial;

O movimento da massa é rectilíneo;

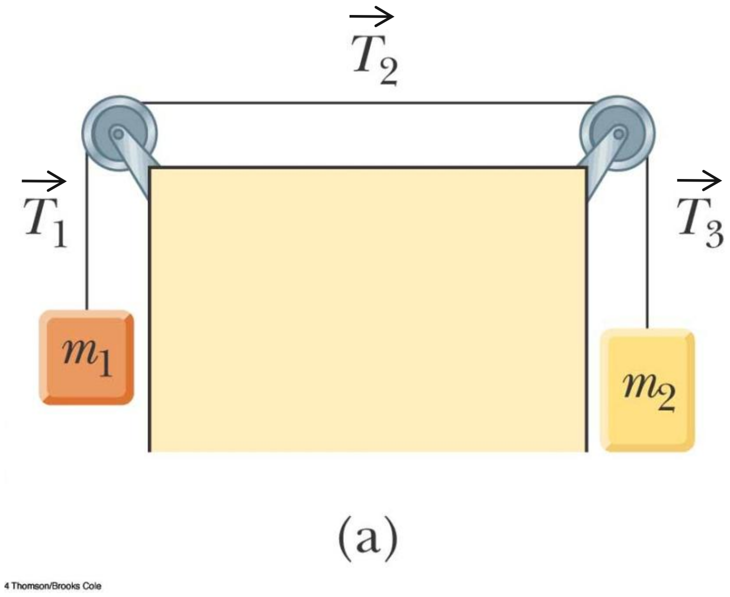
Aplicamos a segunda Lei de Newton:

$$\sum F_y = ma_y = mg - T$$

Momento de uma Força e Aceleração Angular, Vários Corpos, Exemplo 1

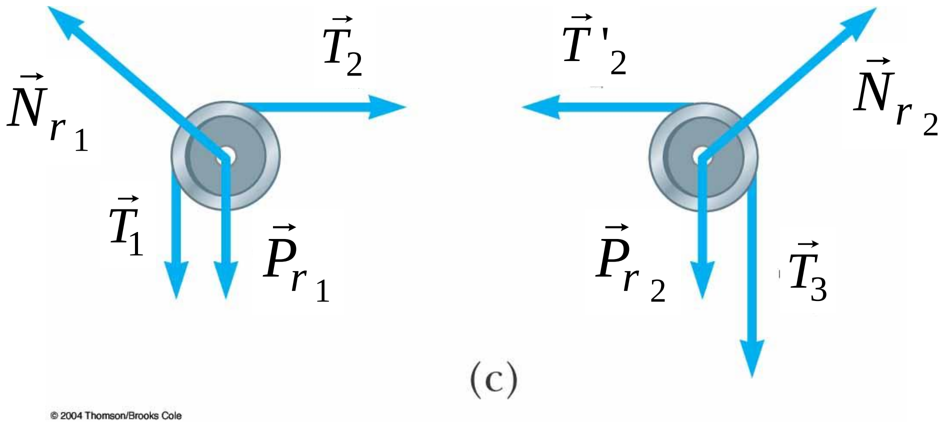
Aplicamos a 2.ª Lei de Newton aos dois corpos;

Aplicamos a expressão do momento de força às roldanas.



FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA

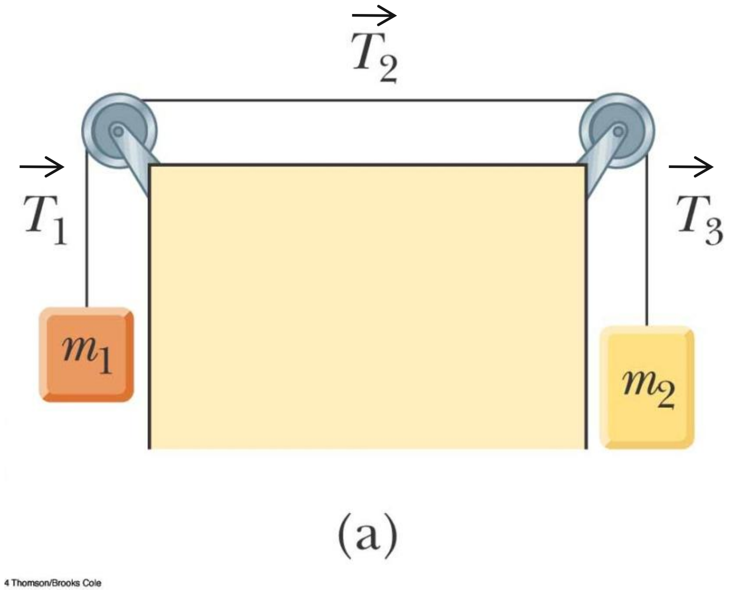
Momento de uma Força e Aceleração Angular, Vários Corpos, Exemplo 1



As forças $\vec{P}_r$ e $\vec{N}_r$ em cada roldana actuam no eixo da roldana e não dão origem a momento de força em relação a esse eixo;

Não esquecer de aplicar os sinais correctos para as rotações no sentido directo e no sentido retrógrado nas equações dos momentos de forças.

Momento de uma Força e Aceleração Angular, Vários Corpos, Exemplo 1



m_1 = 3,0 kg; m_2 = 5,0 kg

Roldanas iguais

$M_{roldana}$ = 2,0 kg; R = 10 cm

O sistema está inicialmente em repouso. Qual a aceleração do sistema?

Corpo 1 $T_1 - P_1 = m_1 a_1$

Roldana Esquerda $\tau_2 - \tau_1 = I_1 \alpha_1$

Corpo 2 $-T_3 + P_2 = m_2 a_2$

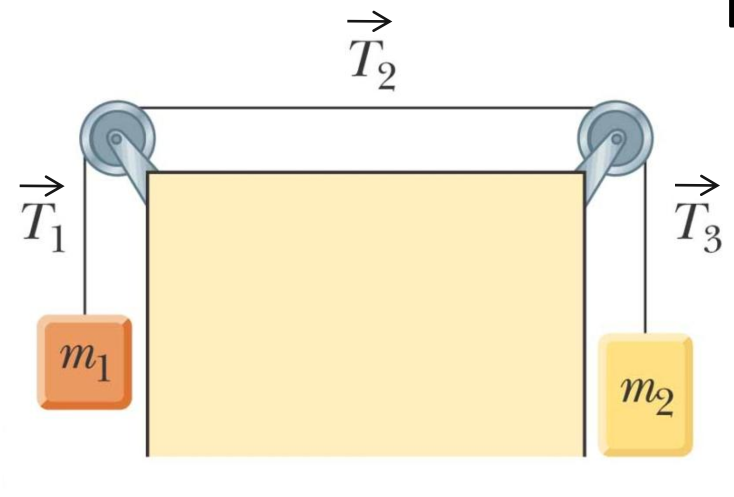
Roldana Direita $\tau_3 - \tau_2 = I_2 \alpha_2$

$$a_1 = a_2 = a \quad \wedge \quad \alpha_1 = \alpha_2 = a / R$$

A corda passa na periferia da roldana

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

Momento de uma Força e Aceleração Angular, Vários Corpos, Exemplo 1



(a)

m_1 = 3,0 kg; m_2 = 5,0 kg

Roldanas iguais

$M_{roldana}$ = 2,0 kg; R = 10 cm

O sistema está inicialmente em repouso. Qual a aceleração do sistema?

Corpo 1 $T_1 - m_1 g = m_1 a$

Roldana Esquerda $2(T_2 - T_1)R = MRa$

Corpo 2 $-T_3 + m_2 g = m_2 a$

Roldana Direita $2(T_3 - T_2)R = MRa$

$$T_3 - T_1 = Ma$$

$$T_3 - T_1 = (m_2 - m_1)g - (m_1 + m_2)a$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + M}$$

O Trabalho no Movimento de Rotação

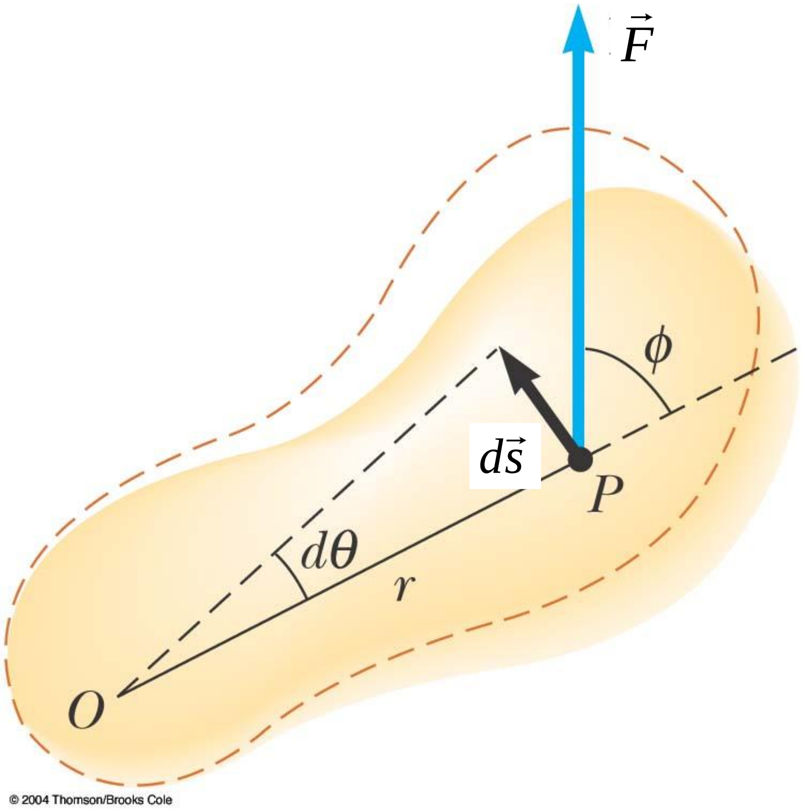
O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ sobre o corpo quando ele roda de uma distância infinitesimal :

$ds = r\,d\theta$ é

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$ $(F \sin\phi)\, r\, d\theta$

$dW = \tau\, d\theta$

A componente radial de $\vec{F}$ não realiza trabalho, porque é perpendicular em cada ponto ao deslocamento.



Potência no Movimento de Rotação

O trabalho efectuado no intervalo de tempo *dt* é:

$$\text{Potência} = \frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega$$

Esta expressão é análoga a $P = Fv$ no movimento rectlíneo.

Teorema da Energia Cinética no Movimento de Rotação

O teorema da energia cinética para o movimento de rotação afirma:

O trabalho resultante realizado pelas forças externas na rotação de um corpo rígido em torno de um eixo fixo é igual à variação da energia cinética de rotação do corpo.

$$\sum W = \int_{\omega_i}^{\omega_f} I\omega \, d\omega = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2$$

Teorema Geral da Energia Cinética

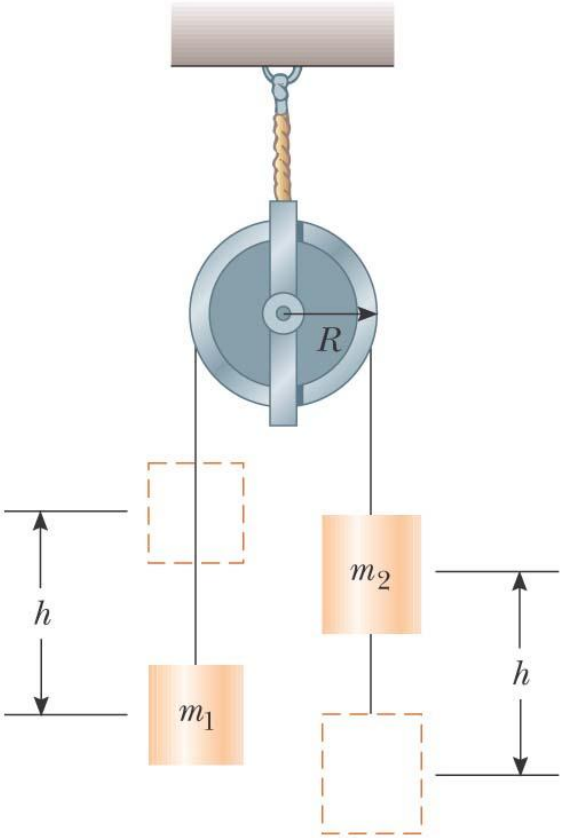
A expressão rotacional pode ser combinada com a expressão linear. Obtemos, assim:

o trabalho resultante realizado pelas forças externas sobre um corpo e igual à variação da energia cinética ***total****, que é a soma da energia cinética associada ao movimento de translação e da energia cinética associada ao movimento de rotação*.

Energia numa Máquina de Atwood, Exemplo

Existe variação na energia cinética de translação e na energia potencial gravítica dos blocos;

Existe variação na energia cinética de rotação da roldana.



Energia numa Máquina de Atwood, Exemplo

m_1 = 3,0 kg

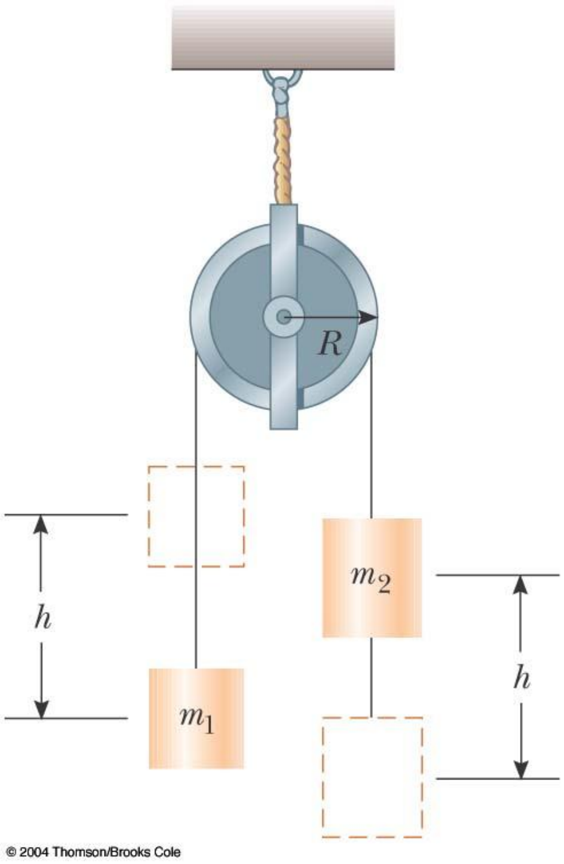
m_2 = 5,0 kg

$M_{roldana}$ = 2,0 kg

R = 10 cm

h = 1,0 m

O sistema está inicialmente em repouso. Qual a velocidade de m_1 depois de m_2 ter descido h?



Energia numa Máquina de Atwood, Exemplo

m_1 = 3,0 kg

m_2 = 5,0 kg

$M_{roldana}$ = 2,0 kg

R = 10 cm

h = 1,0 m

$$E_i = m_2 g h$$

$$E_f = m_1 g h + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$v_1 = v_2 = v \quad \wedge \quad \omega = v / R$$

A corda passa na periferia da roldana

$$I = \frac{1}{2} M R^2$$

$$E_i = E_f$$

$$(m_2 - m_1) g h = (\frac{1}{2} m_1 + \frac{1}{2} m_2 + \frac{1}{4} M) v^2$$

$$v^2 = \frac{4(m_2 - m_1)}{2m_1 + 2m_2 + M} g h \quad \Rightarrow \quad v = 2{,}1 \mathrm{m/s}$$